

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов, С.А. Скворцов (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov (Zhitomir Ivan Franko State University)

О равностепенной непрерывности обратных отображений в метрических пространствах

Про одностайну неперервність обернених відображень в метричних просторах

On equicontinuity of inverse mappings in metric spaces

Для гомеоморфизмов, удовлетворяющих одной оценке модуля семейств кривых в метрических пространствах, получен результат о возможности непрерывного продолжения на границу обратных отображений. Для семейств указанных обратных гомеоморфизмов получены теоремы об их равностепенной непрерывности в замыкании области.

Для гомеоморфізмів, які задовольняють одну оцінку модуля сімей кривих у метричних просторах, отримано результат про можливість неперервного продовження обернених відображень. Для сімей вказаних відображень отримано теореми про їх одностайну неперервність в замиканні області.

For homeomorphisms in metric spaces satisfying one inequality with respect to modulus of families of curves, there is proved a theorem on continuous extension of inverse mappings. For the families of mappings mentioned above, there are proved theorems on equicontinuity in the closure of a domain.

В сравнительно недавних работах [1] и [2] был решён вопрос о возможности непрерывного продолжения на границу одного класса гомеоморфизмов, заданных в метрическом пространстве, обратные к которым удовлетворяют неравенствам модульно-ёмкостного характера (см. [1, лемма 6.1 и теорема 6.1] и [2, лемма 5 и теорема 3]). Независимо от этого, в работе первого автора получено свойство равностепенной непрерывности указанных отображений в замыкании области в \mathbb{R}^n (см. [3, теорема 6.1]).

Основной целью настоящей заметки является установление равностепенной непрерывности аналогичных семейств «обратных» гомеоморфизмов в замыкании области, принадлежащей некоторому классу метрических пространств. Основные необходимые нам определения и обозначения могут быть найдены в монографиях [4], [5] и [6]. Ниже мы укажем только те из них, которые в необходимом нам виде отсутствуют в указанных источниках, либо их употребление может вызвать некоторое разночтение.

Всюду далее (X, d, μ) и (X', d', μ') — произвольные метрические пространства с метриками d и d' , наделённые локально конечными борелевскими мерами μ и μ' . Ниже мы считаем известными определения, связанные с кривыми в метрическом пространстве, длинами дуг, интегралами, условиями допустимости и так далее (см. [6, разд. 13]). Областью D в метрическом пространстве X называется множество D , являющееся линейно связным в X . Пусть $E, F \subset X$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$ в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') , соответственно, и пусть $Q : G \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция. Всюду далее

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\},$$

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}. \quad (1)$$

Будем называть гомеоморфизм $f : G \rightarrow G'$ *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in G$* , если при любых $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial G)$ и для любых сфер $S_1 = S(x_0, r_1)$ и $S_2 = S(x_0, r_2)$ выполнено неравенство

$$M_{\alpha'}(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^\alpha(d(x, x_0)) d\mu(x) \quad (2)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1, \quad (3)$$

где $A = A(x_0, r_1, r_2)$. Аналогично можно определить кольцевой Q -гомеоморфизм в граничной точке $x_0 \in \partial G$ (при этом, само отображение определено лишь в проколотовой окрестности этой точки, см. [2, разд. I]). Будем говорить, что f — *кольцевой Q -гомеоморфизм в \overline{G}* , если f удовлетворяет условию (2) в каждой точке $x_0 \in G$, а также аналогичному условию в каждой точке $x_0 \in \partial G$.

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с мерой μ . Определим *функцию Лёвнера* $\phi_n : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ на X по следующему правилу:

$$\phi_n(t) = \inf\{M_n(\Gamma(E, F, X)) : \Delta(E, F) \leq t\}, \quad (4)$$

где \inf берётся по всем произвольным невырожденным непересекающимся континуумам E, F в X , относительно которых величина $\Delta(E, F)$ определяется как

$$\Delta(E, F) := \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}. \quad (5)$$

Пространство X называется *пространством Лёвнера*, если функция $\phi_n(t)$ положительна при всех положительных значениях t (см. [6, разд. 2.5] либо [7, гл. 8]). Область D в X будем называть *областью квазиэкстремальной длины относительно p -модуля*, сокр. *QED-областью*, если

$$M_\alpha(\Gamma(E, F, X)) \leq A \cdot M_\alpha(\Gamma(E, F, D)) \quad (6)$$

для конечного числа $A \geq 1$ и всех континуумов E и F в D . Если аналогичное свойство выполнено также для всех континуумов E и F в \overline{D} , то мы будем говорить, что D является QED-областью относительно \overline{D} . Область D будет называться *локально линейно связной в точке $x_0 \in \overline{D}$* , если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ такая, что множество $V \cap D$ линейно связно. В частности, будем говорить, что D локально линейно связна на границе ∂D , если D локально линейно связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Для областей $D \subset X$, $D' \subset X'$, $z_0, x_0 \in D$, $z'_0, x'_0 \in D'$, $z'_0 \neq x'_0$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q(x) : X \rightarrow [0, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, обозначим через $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}(D, D')$ семейство всех кольцевых гомеоморфизмов $f : D \rightarrow D'$ в \overline{D} , $f(D) = D'$, таких, что $f(z_0) = z'_0$, $f(x_0) = x'_0$.

Основные результаты настоящей статьи заключает в себе следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что $D \subset X$ и $D' \subset X'$ – области с хаусдорфовыми размерностями $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$, соответственно, X' – пространство Лёвнера с показателем α' , кроме того, $\mu(\overline{B(x_0, R)}) \leq CR^{\alpha'}$ для всех замкнутых шаров в $\overline{B(x_0, R)} \subset X'$ и при некоторой константе $C \geq 1$. Пусть также \overline{D} является компактом, ∂D содержит не менее двух точек, D' является QED-областью относительно $\overline{D'}$, D локально линейно связна на \overline{D} и $Q \in L^1(D)$. Кроме того, предположим, что любые две пары точек $A \in D, B \in \overline{D}$ и $C \in D, F \in \overline{D}$ можно соединить непересекающимися кривыми в области D . Тогда каждый элемент g семейства $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$, состоящего из всех обратных гомеоморфизмов $\{g = f^{-1} : D' \rightarrow D\}$, где отображение $f \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}(D, D')$, может быть продолжен по непрерывности до отображения $\overline{g} = \overline{f}^{-1} : \overline{D'} \rightarrow \overline{D}$, причём семейство $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$, состоящее из всех продолженных, таким образом, отображений $\overline{g} : \overline{D'} \rightarrow \overline{D}$, $g \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D'}$.

Доказательство. Покажем, прежде всего, возможность непрерывного продолжения каждого $f \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ на границу области D' . Согласно [2, теорема 3] достаточно установить, что область D' имеет слабо плоскую границу, т.е., какова бы ни была точка $x_0 \in \partial D'$, для каждого $P > 0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset D'$ такая, что $M_{\alpha'}(E, F, D') > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D'$, пересекающих ∂U и ∂V .

Установим для наших целей свойство сближающихся континуумов в области D' : пусть у нас E, F – континуумы в D' такие, что $\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\} \geq \delta$, где $\delta > 0$ – фиксированное число, и $\text{dist}(E, F) \rightarrow 0$, тогда $M_{\alpha'}(E, F, D') \rightarrow \infty$. Поскольку X' по предположению является пространством Лёвнера и, кроме того, $\mu(\overline{B(x_0, R)}) \leq CR^{\alpha'}$ для всех замкнутых шаров $\overline{B(x_0, R)} \subset X'$ и некоторой константе $C \geq 1$, то $\phi_{\alpha'}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ (см. [7, теорема 8.23]). Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и для него найдём $t_0 = t_0(\varepsilon)$ такое, что при $t \in (0, t_0)$ выполнено $\phi_{\alpha'}(t) > \varepsilon$. Положим $\Delta(E, F) = t$, где $\Delta(E, F)$ определено в (5). Тогда ввиду (4)

$$\varepsilon < M_{\alpha'}(E, F, X') \quad (7)$$

как только $t \in (0, t_0)$ и $\Delta(E, F) = t$. Заметим, что $\Delta(E, F) \leq \frac{1}{\delta} \text{dist}(E, F)$, и если $\text{dist}(E, F) \in (0, t_0\delta)$, то $\Delta(E, F) = t \in (0, t_0)$ и, значит, имеет место соотношение (7). Окончательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось $t'_0 = t_0\delta$ такое, что как только $\text{dist}(E, F) \in (0, t'_0)$, выполняется условие (7). Из того, что D' является QED -областью, вытекает, что

$$\varepsilon/K < M_{\alpha'}(E, F, D'), \quad (8)$$

где K – некоторая фиксированная постоянная, откуда и следует, что $M_{\alpha'}(E, F, D') \rightarrow \infty$ при $\text{dist}(E, F) \rightarrow 0$.

Пусть теперь $x_0 \in \partial D'$ – произвольная точка. Берём произвольную окрестность U точки x_0 и произвольное $P > 0$. Для числа $k \in \mathbb{N}$ найдём окрестность V_k , лежащую в шаре $\overline{B(x_0, 2^{-k})}$. Рассмотрим континуумы E и F , пересекающие ∂U и ∂V_k . Заметим, что $\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\} \geq \delta > 0$ при достаточно больших k , поскольку U – фиксированная окрестность, $\text{dist}(\partial V_k, x_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а $\text{diam } E$ и $\text{diam } F$ не меньше расстояния между ∂U и ∂V_k . Кроме того, $\text{dist}(E, F) \leq \text{diam } \partial V_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда в силу (7) $M_{\alpha'}(E, F, D') = \alpha_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Подберём k_0 так, чтобы $\alpha_k > P$ при $k \geq k_0$ (это число k_0 полностью определяется числом P). Положим $V := V_{k_0}$. Тогда получаем, что $M_{\alpha'}(E, F, D') > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D'$, пересекающих ∂U и ∂V , что и требовалось установить. Итак, каждое $f \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ продолжается непрерывным образом в точку $x_0 \in \partial D$ ввиду [2, теорема 3].

Осталось показать равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ (обозначения не меняем) в области $\overline{D'}$.

Покажем сначала, что $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ равностепенно непрерывно в $\overline{D'} \setminus \{x'_0, z'_0\}$. Предположим противное, т.е. найдутся $y_0 \neq z'_0$, $y_0 \neq x'_0$, и $\varepsilon_0 > 0$, такие что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $y_m \in \overline{D'}$ с $d'(y_m, y_0) < 1/m$ и элемент $f_m^{-1} \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$, такие

что

$$d(f_m^{-1}(y_m), f_m^{-1}(y_0)) \geq \varepsilon_0. \quad (9)$$

Т.к., по условию, \overline{D} является компактом, существует возрастающая подпоследовательность номеров m_k и $x_0^1, x_0^2 \in \overline{D}$ такие, что $f_{m_k}^{-1}(y_{m_k}) \rightarrow x_0^1$ и $f_{m_k}^{-1}(y_0) \rightarrow x_0^2$ при $k \rightarrow \infty$. В силу неравенства (9), $d(x_0^1, x_0^2) \geq \varepsilon_0/2$. Т.к. D локально линейно связна на \overline{D} , существуют окрестности U_i точек x_0^i , $i = 1, 2$, такие, что множества $W_i = U_i \cap D$ являются линейно связными, причём $W_i \subset B(x_0^i, \varepsilon_0/6)$. Заметим, что $\text{dist}(W_1, W_2) \geq \varepsilon_0/6$. Можно считать, что x_0 лежит вне W_2 , а z_0 — вне W_1 . Соединим точки x_0 и x_0^1 замкнутой кривой C_1 , лежащей в области D , кроме, возможно, одной концевой точки, а z_0 и x_0^2 , аналогично, замкнутой кривой C_2 , так что $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ (это возможно по условию теоремы). Рассмотрим множества $A_1 := W_1 \cup C_1$ и $A_2 := W_2 \cup C_2$. Заметим, что $\text{dist}(A_1, A_2) = \delta > 0$. Пусть Γ — семейство кривых, соединяющих множества $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ в D , тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ и

$$M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma)) \leq \frac{1}{\delta^n} \int_D Q(x) d\mu(x) := c(\delta) < \infty, \quad (10)$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, z'_0 и $y_0 \in f_{m_k}(A_2)$ и $\text{diam } f_{m_k}(A_2) \geq d'(z'_0, y_0) \geq \delta_2 > 0$, т.к. $z'_0 \neq y_0$ по предположению. Аналогично, x'_0 и $y_{m_k} \in f_{m_k}(A_1)$ и $\text{diam } f_{m_k}(A_1) \geq \delta_1 > 0$, т.к. $d'(y_{m_k}, y_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $x'_0 \neq y_0$ по предположению. Кроме того, заметим, что $d'(f_{m_k}(A_1), f_{m_k}(A_2)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т.к. $d'(y_{m_k}, y_0) < 1/m_k$ и, следовательно, $d'(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$f_{m_k}(\Gamma) = \Gamma(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, D'). \quad (11)$$

Т.к. D' является QED -областью относительно $\overline{D'}$, учитывая соотношение (11), получаем

$$\begin{aligned} A \cdot M_{\alpha'}(f_{m_k}(\Gamma)) &= A \cdot M_{\alpha'}\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, D'\right)\right) \geq \\ &\geq M_{\alpha'}\left(\Gamma\left(\overline{f_{m_k}(A_1)}, \overline{f_{m_k}(A_2)}, X'\right)\right) \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12)$$

при $k \rightarrow \infty$. Однако, последнее соотношение противоречит (10). Полученное противоречие доказывает равномерную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ в $\overline{D'} \setminus \{z'_0\}$.

Докажем теперь равномерную непрерывность семейства $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ в точках x'_0 и z'_0 . Докажем, что $\mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$ равномерно непрерывно в точке x'_0 (в точке z'_0 рассуждения проводятся аналогично).

Предположим противное, т.е. найдутся элементы $x_m \in \overline{D'}$, $m = 1, 2, \dots$, и $f_m^{-1} \in \mathfrak{H}_{z_0, x_0, z'_0, x'_0, Q}^{-1}(D, D')$, такие что $d'(x_m, x'_0) < 1/m$ и, при этом

$$d(f_m^{-1}(x_m), x_0) \geq \varepsilon_0. \quad (13)$$

Т.к., по условию, \overline{D} является компактом, можно считать, что $f_m^{-1}(x_m) \rightarrow x_0^1$ при $m \rightarrow \infty$. В силу неравенства (9), $d(x_0^1, x_0) \geq \varepsilon_0/2$. Из условия теоремы вытекает, что найдётся по крайней мере одна граничная точка x_0^2 области D , не совпадающая с x_0^1 . Тогда рассмотрим в качестве A_1 кривую, соединяющую x_0^1 и x_0 . Пусть C – кривая, соединяющая x_0^2 и z_0 . Поскольку A_1 и z_0 являются компактными в D , найдётся некоторая окрестность W точки z_0 , расстояние от которой до кривой A_1 не меньше $\delta > 0$. Полагаем $A_2 := C \cup W$. Рассуждая относительно A_1 и A_2 также, как выше, получаем соотношения (10) и (12), которые противоречат друг другу, что говорит о неверности предположения (13). Теорема доказана. \square

Список литературы

- [1] *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
- [2] *Смолова Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2012. – **62**, № 5. – С. 682–689.
- [3] *Севостьянов Е. А.* О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Математические труды. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178–204.
- [4] *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
- [5] *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 213 p.
- [6] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
- [7] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов

Сергей Александрович Скворцов

Житомирский государственный университет им. И. Франко

кафедра математического анализа, ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru